Scenariusz 14. Miejscowość turystyczna

Znakomitym modelem wielu problemów (np. inżynierskich) mogą być obiekty matematyczne zwane grafami. Dzięki temu abstrakcyjnemu przedstawieniu danego problemu projektowanie użytecznych algorytmów jego rozwiązania staje się łatwiejsze.

W czasie tych zajęć celem uczniów będzie wskazanie (wyróżnienie) możliwie jak najmniejszej liczby wierzchołków grafu takich, że wszystkie pozostałe wierzchołki będą sąsiadować z przynajmniej jednym ze wskazanych. Zadanie okaże się zaskakująco trudne.

Zajęcia przeznaczone są dla dzieci w wieku 7 lat i więcej.

Przed lekcją należy przygotować odpowiednią liczbę kserokopii karty pracy oraz dwa zestawy żetonów (po kilkanaście w dwóch kolorach) dla każdej grupy uczniów.

1.1. Przebieg lekcji

1.1.1. Wprowadzenie

Na karcie pracy znajduje się mapa Miejscowości turystycznej. Linie (krawędzie grafu) to ulice a punkty (wierzchołki) to skrzyżowania ulic. Miejscowość położona jest w bardzo gorącym kraju, w którym latem na wielu rogach ulic ustawia się obwoźne lodziarnie dla turystów.

Zadanie polega na takim ich rozmieszczeniu, by każdy mógł kupić lody najdalej przy drugim skrzyżowaniu od miejsca zakwaterowania (inaczej mówiąc: jeśli punktu sprzedaży nie ma przy najbliższym skrzyżowaniu, to na pewno jest przynajmniej na jednym z sąsiednich).

Powstaje pytanie: Jaka jest najmniejsza liczba potrzebnych w mieście punktów sprzedaży i przy których skrzyżowaniach powinny być ulokowane?

1.1.2. Etapy lekcji

1. Podziel dzieci na małe grupy. Każdej z nich daj kartę pracy (załącznik) i zestaw żetonów. Przedstaw zadanie w formie ciekawej historii o Miejscowości turystycznej.

2. Wyjaśnij dzieciom, jak mają posługiwać się żetonami każdego koloru (odpowiednio do zaznaczenia skrzyżowań, przy których odbywa się sprzedaż i sąsiednich skrzyżowań, przy których nie ma potrzeby stawiania lodziarni).

3.Poleć dzieciom, by wykonały kilka prób ustalenia pozycji pojazdów w taki sposób, by ich liczba była jak najmniejsza – przypomnij im o tym, że koszty inwestycji powinny być jak najmniejsze.

4. Poinformuj dzieci, że minimalna liczba lokalizacji dla tego miasta jest liczba 6. Dzieciom może się nie udać odnalezienie tego rozwiązania. Nawet wtedy, kiedy powiemy już im, ile lodziarni mają ustawić. Wskazanie przez uczniów rozwiązania z użyciem ośmiu czy nawet dziewięciu pojazdów może okazać się najlepszym dostępnym dla ich grupy.

5. Pokaż uczniom, używając przygotowanej folii i rzutnika pisma lub wykonując odpowiedni rysunek, jak powstawała mapa Miejscowości turystycznej: przez odpowiednie połączenie sześciu części-

fragmentów mapy. Każda z nich przedstawia taki układ ulic, w przypadku którego wystarcza ustawienie lodziarni tylko przy jednym ze skrzyżowań. To odpowiednie połączenie fragmentów polega na tym, że między skrzyżowaniami pozbawionymi punktów sprzedaży (z tego samego fragmentu lub różnych fragmentów) dodaje się pewną liczbę ulic.

6. Poleć uczniom stworzenie własnych odpowiednio trudnych przykładów map. Przy okazji mogą sprawdzić ich trudność na swoich kolegach lub rodzicach. Fakt, iż są w stanie stworzyć łamigłówki, których inni nie potrafią rozwiązać może sprawić im nie lada satysfakcję. To doświadczenie może dać dziecku pewne wyobrażenie o kluczowym znaczeniu tzw. funkcji jednokierunkowych w zastosowaniach informatyki (kryptografii).

1.2. Modyfikacje i rozszerzenia

Można podać wiele przykładów sytuacji dotyczących zagospodarowania przestrzeni dużego miasta: planowanie położenia skrzynek pocztowych (na listy), studzienek kanalizacyjnych, remiz strażackich itp. W realnym świecie mapa nie powstaje w wyniku sztuczki, która sprawia, że problem jest prosty do rozwiązania (przynajmniej dla autora mapy…). W jaki sposób rozwiązuje tego rodzaju problemy?

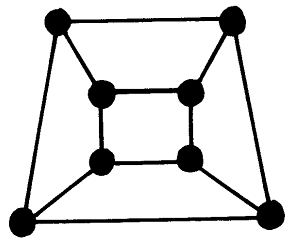
Dlaczego by nie rozpatrzyć po prostu wszystkich możliwych przypadków rozmieszczenia np. punktów sprzedaży lodów i wybrać najlepszy? W przypadku miasta z naszej łamigłówki mamy 26 skrzyżowań. Dość łatwo sprawdzić, że jedna lodziarnia, jakkolwiek umiejscowiona, nie wystarczy. Sprawdzenie przypadku dla dwóch wymaga już sprawdzenia 26 x 25 = 650 możliwych konfiguracji (właściwie dwa razy mniej, bo 325: tyle jest par skrzyżowań do wyboru). Można w ten sposób przeszukać ustawienia trzech (2600 możliwości), czterech (14 950 możliwości), czy jeszcze większej liczby pojazdów z lodami. Oczywiście optymalne rozwiązanie nie może dotyczyć liczby lodziarni większej niż 26. Jaka jest liczba wszystkich możliwych konfiguracji do przeszukania? Ponieważ mamy 26 skrzyżowań i przy każdym z nich może znajdować się pojazd lub nie, więc mamy 2^{26} konfiguracji, tj. 67 108 864.

Tego rodzaju metodę rozwiązywania problemów określa się w informatyce metodą prostego przeszukiwania (ang. brute-force) i jest ona najczęściej niezwykle czasochłonna. Dość powszechnie funkcjonuje fałszywe przekonanie o tym, że współczesne komputery działają z tak dużą szybkością, że wykonanie jakiejkolwiek ogromnej ilości obliczeń nie stanowi dla nich większego problemu. Analizując nasz przykład musimy pamiętać, że sprawdzenie, czy dana konfiguracja (pojazdy ustawione przy konkretnych skrzyżowaniach) spełnia warunki zadania, trwa jakiś określony czas. Taki test wymaga wyznaczenia odległości, w jakiej od każdego skrzyżowania znajduje się najbliższa lodziarnia. Załóżmy, że wymaga to 1 sekundy działania komputera. W przypadku 2^{26} możliwych do rozpatrzenia przypadków oszacujemy czas działania algorytmu w ten sposób: 2^{26} to ok. 67 milionów; jeden dzień to 86 400 sekund, więc wszystko potrwa w przybliżeniu 777 dni, czyli ponad dwa lata. Jak wyglądałaby sytuacja, gdyby sprawdzenie pojedynczej konfiguracji trwało tylko 1/1000 część sekundy? W przypadku takiej szybkości komputera w ciągu dwóch lat można by sprawdzić miasto o 36 skrzyżowaniach, ponieważ 2^{36} jest ok 1000 razy większe od 2^{26}. Nawet gdyby komputer działał milion razy szybciej (czyli w ciągu jednej sekundy analizował milion konfiguracji), to w ciągu dwóch lat nie rozwiązałyby problemu ustawienia pojazdów dla miasta o liczbie skrzyżowań większej niż 46. Tymczasem to nie jest wcale takie duże miasto. (Ile skrzyżowań znajduje się w dużych miastach?)

Jeśli metoda przeszukiwania jest tak nieefektywna, to powstaje pytanie o to, czy są inne metody rozwiązania takiego problemu? Można by spróbować zastosować podejście zachłanne (skuteczne w przypadku niektórych łamigłówek). Na czym miałoby ono polegać w tym zadaniu? Na ustawianiu lodziarni w pierwszej kolejności przy skrzyżowaniach łączących największą liczbę ulic itd. Okaże się jednak, że niekoniecznie prowadzi to do minimalizacji liczby lodziarni – w przypadku Miejscowości turystycznej, wybór skrzyżowania łączącego największą liczbę ulic (pięć) to nie jest najlepszy pomysł.

Uprośćmy nasz problem. Zamiast pytać o możliwie najmniejszą liczbę potrzebnych skrzyżowań (problem optymalizacyjny), ograniczmy się do szukania odpowiedzi na pytanie „czy dana konfiguracja jest minimalna czy nie?” (problem decyzyjny)

Jej znalezienie może być czasami łatwe. Oto przykład takiego diagramu-mapy, dla której dość łatwo znaleźć rozwiązanie



Jeśli dostrzeżemy w tym grafie model krawędziowy sześcianu, to powinno stać się dla nas oczywiste, że dwa pojazdy w tym „mieście" są niezbędne i że dwa zamieszczone w wierzchołkach „po przekątnej" wystarczą. Znacznie trudniej – choć nie jest to niemożliwe – uzasadnić (tj. przekonać najpierw samego siebie), że w Turystycznym mieście nie może być mniej niż sześć lodziarni. Okazuje się, że uzasadnienie, że dana konfiguracja jest optymalna dla miasta może być w ogólności zadaniem niezwykle trudnym.

1.3. Rozwiązanie

Oto zasada konstrukcji łamigłówki:

1.4. O co w tym wszystkim chodzi?

Jednym z interesujących aspektów problemu Miejscowości turystycznej jest to, że naukowcy nie mają pojęcia, czy w ogóle istnieje algorytm lokalizacji lodziarni, który byłby znacząco szybszy od metody przeszukiwania. W przypadku tej ostatniej czas działania algorytmu rośnie wykładniczo wraz ze wzrostem liczby skrzyżowań – jest to algorytm o tzw. złożoności wykładniczej. Algorytmem wielomianowym (o złożoności wielomianowej) byłby taki, w przypadku którego czas jego działania zwiększałby się proporcjonalnie do kwadratu, sześcianu lub np. do 17 potęgi liczby skrzyżowań. Taki algorytm zawsze byłby szybszy od wykładniczego dla odpowiednio dużych map (np. dla n>117 liczba n^{17} jest mniejsza od 2^n). Czy istnieje wielomianowy algorytm dla problemu Miejscowości turystycznej? Nie znamy odpowiedzi na to pytanie. Mimo że podejmowano usilne próby jej znalezienia. Podobna sytuacja występuje w przypadku pozornie prostszego problemu rozstrzygnięcia, czy konkretna konfiguracja jest optymalna (problem decyzyjny). Jedyna metoda to metoda siłowa polegająca na przeszukaniu wszelkich konfiguracji o mniejszej liczbie lokalizacji. Algorytmy wielomianowe dla tego problemu nie zostały wynalezione oraz nikt nie udowodnił, że nie istnieją.

Problem Miejscowości turystycznej jest w istocie problem optymalizacyjnym znajdowania minimalnego zbioru dominującego w grafie. Jest jednym z ogromnej, liczonej w tysiącach, grupy znanych problemów, o których nie wiadomo czy istnieją dla nich wielomianowe algorytmy ich rozwiązania. Należą do nich problemy z logiki, teorii grafów czy teorii szeregowania zadań. Zadziwiające jest to, że wszystkie te problemy są sobie równoważne w tym sensie, że odnalezienie wielomianowego algorytmu dla jednego z nich oznaczałoby, że można – po odpowiedniej adaptacji algorytmu – rozwiązać każdy z problemów.

Takie problemy nazywa się w informatyce problemami NP zupełnymi. NP to skrót od angielskiego określenia „non-deterministic polynomial”. Oznacza to tyle, że problemy tego rodzaju da się rozwiązywać w rozsądnym czasie z użyciem komputera, który potrafi jednocześnie sprawdzać dowolnie dużą liczbę rozwiązań. To w istocie jest nierealistyczne założenie. Nie da się bowiem zbudować komputera tego rodzaju. Jednakże koncepcja takiej maszyny jest ważna, ponieważ wynika z niej, że problemy NP zupełne nie mogą być rozwiązane w rozsądnym czasie bez użycia komputera niedeterministycznego. Co więcej grupa tych problemów nazywana jest zupełną, ponieważ choć problemy wydają się zupełnie różne od siebie – dla przykładu: kolorowanie mapy niewiele ma wspólnego z umieszczaniem pojazdów przy skrzyżowaniach – to okazuje się, że efektywna metoda rozwiązywania jednego z problemów może być zaadoptowana do rozwiązania każdego innego.

Istnieją tysiące problemów NP-zupełnych i naukowcy bez powodzenia poszukują efektywnych metod ich rozwiązania. Dość powszechnie panuje przekonanie, że taka metoda nie istnieje. Udowodnienie, że potrzebne są algorytmy wykładnicze pozostaje wielkim otwartym pytaniem teoretycznej informatyki, czyli w sumie matematyki.

Karta pracy nr 1. Miejscowość turystyczna

Rozmieść obwoźne lodziarnie tak, by każdy turysta mógł kupić lody jeśli nie przy najbliższym skrzyżowaniu, to przy jednym z nim sąsiadujących.