

Aktivität 7

Vom Leichtesten zum Schwersten – Sortieralgorithmen

Zusammenfassung

Häufig verwendet man Computer dazu Listen von Elementen in eine bestimmte Ordnung zu bringen. So kann man beispielsweise Namen alphabetisch sortieren, Verabredungen nach Datum, oder Zahlen in auf- oder absteigender Reihenfolge sortieren. Wir interessieren uns dafür wie man Elemente sortiert, um Elemente beim Suchen einfacher finden zu können. Zudem ist das Aufspüren spezieller Werte (wie beispielsweise das grösste oder kleinste Element) nach dem Sortieren ganz einfach. Wenn man beispielsweise die Noten einer Klasse aufsteigend sortiert, ist es ein Einfaches die höchste und die tiefste Note zu finden; diese findet man am Anfang beziehungsweise am Ende der sortierten Liste.

Allerdings erhalten wir die Ordnung nicht gratis; wir zahlen dafür mit Zeit. Es gibt diverse Methoden, die verschieden lange dauern. Sie alle haben den gleichen Effekt: Sie sortieren die Elemente. Da dies jedoch nicht gleich lange dauert bei den verschiedenen Methoden, sind wir daran interessiert die beste Methode zu finden. Wählt man die falsche, kann es unter Umständen sehr lange dauern bis alle Zahlen korrekt angeordnet sind, auch auf einem schnellen Computer.

In dieser Aktivität sollen Kinder verschiedene Sortierverfahren kennen lernen und deren Geschwindigkeit vergleichen.

Themenüberschnitte

- ✓ Mathematik: Wägen, Zählen, Vergleichen

Vorkenntnisse

- ✓ Wie benutzt man eine Waage
- ✓ Was heisst es Elemente zu ordnen
- ✓ Wie vergleicht man Zahlen

Alter

- ✓ 8+

Materialien

Jede Gruppe wird folgende Materialien benötigen:

- ✓ 8 Behälter, alle gleich gross, aber verschieden schwer
- ✓ Eine Waage
- ✓ Aufgabenblatt: Gewichte sortieren (Seite 3)
- ✓ Aufgabenblatt: Teilen und Herrschen (Seite 4)

Vom Leichtesten zu Schwersten

Diskussion

Sortieren gehört zu den Sachen, die von Computern sehr oft ausgeführt werden. Es ist wichtig sich im Klaren zu sein dass es viele Situationen gibt, in welchen wir daran interessiert sind eine Menge von Daten zu ordnen. In einem Brainstorming soll die Klasse Situationen zusammen tragen, in welchen eine Ordnung hilfreich ist. Eine Klassendiskussion soll darauf folgen mit der Frage was wäre, wenn in diesen Situationen keine geordneten Daten vorliegen würden (anhand einiger der vorher zusammengetragenen Situationen, in welchen eine Ordnung der Daten nützlich ist).

Normalerweise vergleicht ein Computer jeweils nur zwei Werte miteinander, da zeitweise eine zu grosse Menge von Daten vorliegt um sich sie alle merken zu können. Die Aktivität auf den folgenden Seiten verwendet diese Einschränkung und gibt den Kindern so ein Verständnis dafür, wie das Sortieren auf dem Computer funktioniert.

Vorgehen

1. Die Kinder in Gruppen unterteilen
2. Jede Gruppe erhält:
 - a. Die Aufgabenstellung (Seite 3)
 - b. Acht Behälter mit Gewichten
 - c. Eine Waage
3. Die Kinder führen die Aktivität aus
4. Die Resultate und Erkenntnisse werden in der Klasse besprochen

Aufgabenblatt: Gewichte Sortieren

Aufgabe

Finde die beste Methode eine Menge von Elementen mit unbekanntem Gewicht in aufsteigender Reihenfolge zu sortieren.

Das brauchst du dazu:

Sand oder Wasser als Gewichte, 8 identische Büchsen und eine Waage.

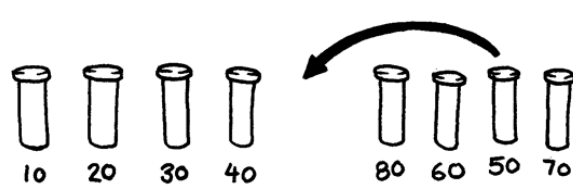
Vorgehen:

1. Fülle jede Büchse mit Wasser oder Sand. Achte darauf, dass alle Büchsen dicht verschlossen sind.
2. Mische die Büchsen, sodass du nicht mehr weißt welche Büchse welche ist.
3. Finde die leichteste Büchse. Wie kann man das am Einfachsten machen?
Beachte: Es ist nicht erlaubt die Waage dazu zu verwenden mehr als 2 Büchsen miteinander zu vergleichen.
4. Wähle zufällig drei Gewichte aus und sortiere sie nach aufsteigendem Gewicht (links die leichteste Büchse, rechts die schwerste der drei Büchsen). Wie bist du vorgegangen? Wie oft muss man mit der Waage zwei Gewichte vergleichen um die drei Büchsen korrekt anzuordnen?
5. Sortiere nun alle Objekte in aufsteigender Reihenfolge, links das leichteste Gewicht, rechts das schwerste Gewicht.

Wenn du fertig bist, kannst du deine Lösung kontrollieren, indem du alle benachbarten Büchsen nochmals vergleichst.

Sortieren durch Auswählen

Eine erste Methode, die wir nun untersuchen werden, heisst *Sortieren durch Auswählen*. Dieses funktioniert folgendermassen: Zuerst suchen wir unter allen Elementen das Leichteste und platzieren es ganz links. Dann suchen wir wiederum das Leichteste aus denjenigen Elementen, die noch übrig sind. So geht das weiter, bis keine Büchsen mehr übrig sind.



Zähle wie oft du die Waage für einen Vergleich zweier Büchsen verwendet hast.

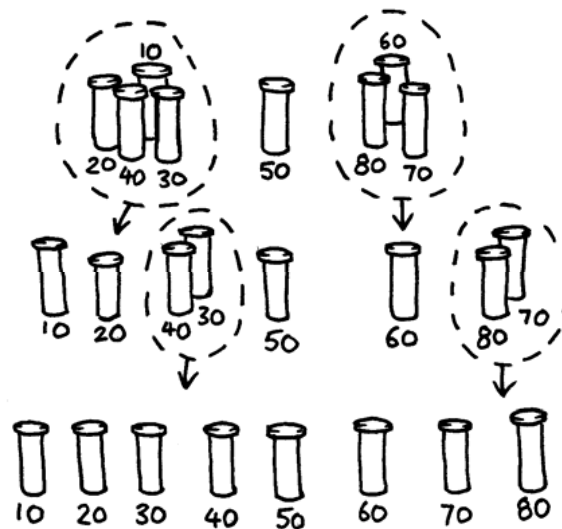
Zusatzaufgabe für Experten: Zeige, wie man berechnen kann wie viele Vergleiche man auf diese Weise benötigt, wenn man acht Objekte sortieren will. Wie sieht es aus für neun Objekte? Oder 20?

Aufgabenblatt: Teile und Herrsche

Quicksort:

Quicksort ist um einiges schneller als Sortieren durch Auswählen, besonders für grosse Mengen von Elementen. Es handelt sich sogar um eine der besten Methoden, die heute bekannt sind. Und so funktioniert es:

1. Wähle ein zufälliges Element aus und platziere es auf der einen Seite der Waage.
2. Danach vergleichst du alle anderen Elemente mit dem soeben Gewählten. Diejenigen, die leichter sind als das Element legst du links hin, die anderen rechts, und das Element selbst zum Schluss in die Mitte. (Beachte: Es kann vorkommen, dass sehr viel weniger Elemente auf einer Seite sind als auf der anderen.)
3. Wiederhole die obigen zwei Anweisungen für die beiden Teile. Das Objekt welches du zuvor in die Mitte gestellt hast, musst du jedoch nicht mehr wägen. Es bleibt in der Mitte stehen.
4. Auf die entstehenden Untergruppen wenden wir wiederum die ersten zwei Anweisungen an, bis alle Elemente verarbeitet wurden und es demzufolge keine zwei Elemente zum Vergleichen gab. Nun sind die Elemente aufsteigend angeordnet.



Wie oft hast du bei dieser Methode die Waage benutzt?

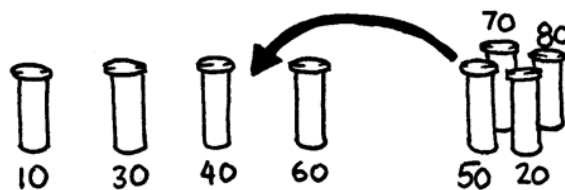
Du solltest festgestellt haben, dass Quicksort effizienter arbeitet als Sortieren durch Auswählen, ausser du hast in jedem Schritt immer das aktuell schwerste Element gewählt. Wenn du jedes Mal zufällig das mittlere Gewicht gewählt hast, hast du 14 mal die Waage benutzt, was wesentlich besser ist, verglichen zu den 28 Vergleichen bei Sortieren durch Auswählen. Auf jeden Fall kann Quicksort nie schlechter sein als Sortieren durch Auswählen. Möglicherweise kann es aber viel besser sein.

Zusatzaufgabe für Experten: Wie viele Vergleiche würde Quicksort brauchen, wenn jedes Mal zufällig das leichteste Element gewählt würde?

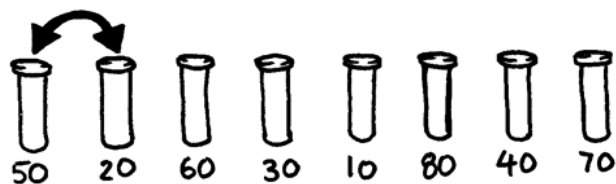
Variationen und Erweiterungen

Es wurde diverse Methoden entwickelt, mit welchen sortiert werden kann. So könnte man die Gewichte auf folgende Weise sortieren:

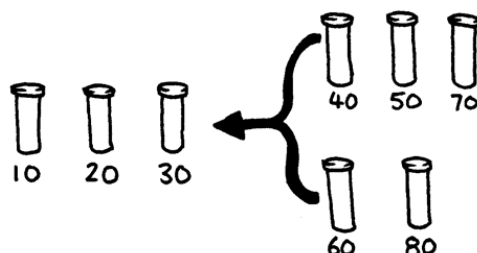
Sortieren durch Einfügen: Diese Methode entnimmt jedes Objekt aus einer unsortierten Menge und ordnet es an der korrekten Stelle in eine bereits sortierte Menge ein. (Siehe das Bild unten). Mit jeder Einfügeoperation, wird die Menge der unsortierten Elemente kleiner, bis schliesslich alle Elemente aufsteigend sortiert sind.



Bubblesort: Diese Methode sortiert die Elemente, indem sie immer wieder durch die Liste durchgeht und alle benachbarten Elemente tauscht, die falsch herum da stehen. Die Liste ist sortiert, sobald es keine Vertauschungen benachbarter Elemente mehr gibt. Diese Methode ist nicht sonderlich schnell, es gibt jedoch Menschen, die diese Methode einfacher verstehen als die anderen Methoden.



Mergesort: Dies ist eine andere Methode, die das Prinzip ‚Teile und Herrsche‘ verwendet (wie Quicksort). Zuerst wird die Liste zufällig in zwei Teile der gleichen Grösse aufgeteilt (oder fast der gleichen Grösse, falls es eine ungerade Anzahl Elemente hat). Die beiden Hälften werden sortiert und wieder zusammengefügt. Das Zusammenfügen zweier Listen ist einfach: Wir suchen wiederholt das leichteste Element und nehmen es aus der Menge raus, bis keine Elemente mehr übrig sind. In der Abbildung unten steht eine 40g Büchse und eine 60g Büchse zur Auswahl. Wir fügen als nächstes also die 40g Büchse ein. Wie aber erhalten wir zwei sortierte Teile? Einfach, wir wenden Mergesort auf die beiden Teile an! Irgendwann erhalten wir Teile, die nur eine Büchse enthalten. Eine solche Menge ist bereits sortiert.



Worum geht es in dieser Aktivität?

Es ist wesentlich einfacher Informationen in einer geordneten Liste zu finden als wenn man sie in einer ungeordneten Liste suchen müsste. Telefonbücher, Wörterbücher und Verzeichnisse sind alphabetisch geordnet und das Leben wäre wesentlich weniger bequem wenn sie es nicht wären. Wenn eine Liste von Zahlen (wie zum Beispiel eine Liste mit Ausgaben) geordnet vorliegt, ist es einfach die Extremen zu sehen, weil sie sich ganz am Anfang oder ganz am Schluss der Liste befinden, während sie in unsortierten Listen überall vorkommen können. Auch doppelte Einträge findet man einfach, da diese direkt nebeneinander liegen in sortierten Listen.

Computer verbringen einen grossen Teil der Zeit damit Dinge zu ordnen, also ist es für Informatiker von Interesse dies schnell und gut zu machen. Einige der langsameren Methoden wie beispielsweise Sortieren durch Einfügen, Sortieren durch Auswählen oder Bubblesort können in gewissen Situationen sehr nützlich sein, doch in den meisten Fällen verwendet man ein schnelles Verfahren wie zum Beispiel Quicksort.

Quicksort verwendet ein Konzept, das man Rekursion nennt. Das bedeutet, dass wir die Liste immer wieder in kleinere Teile unterteilen und auf diesen kleineren Teilen genau dasselbe tun wie wir es vorher beim grösseren Teil gemacht haben. Dieser Ansatz im Speziellen nennt man „Teile und Herrsche“. Die Liste wird immer wieder unterteilt, bis wir schliesslich fähig sind (wenn die Liste klein genug ist) deren Ordnung zu bestimmen. Im Falle von Quicksort werden die Listen unterteilt bis sie nur noch ein Element enthalten, da es einfach ist eine Menge mit nur einem Element zu sortieren. Das klingt zwar kompliziert, verhilft uns aber in der Praxis dazu wesentlich schneller zum Ziel zu kommen als mit anderen Methoden.

Lösungen und Tipps

4. Am Einfachsten ist es jedes Element der Reihe nach anzuschauen und sich jeweils zu merken wo sich das momentan leichteste Element befindet, wenn wir aus einer Menge von Elementen das Leichteste bestimmen wollen. Das heisst, wir wählen zwei Elemente und behalten das Leichtere davon auf der Waage. Das andere legen wir weg und nehmen statt dessen ein neues Element hinzu um wieder gleich vorzugehen. Das machen wir, bis alle Elemente verglichen wurden und wir das leichteste Element noch auf der Waage haben.

5. Vergleiche die Gewichte auf der Waage. Wir können drei Elemente ordnen, indem wir die Waage dreimal benützen (in manchen Fällen reichen sogar zwei). Die Kinder müssen merken, dass Gewichtsvergleiche transitiv sind (wenn als Gewicht a leichter ist als Gewicht b und Gewicht b leichter als Gewicht c, dann ist auch das Gewicht a leichter als das Gewicht c).

Expertenfragen:

Hier ein Tipp, wie man die Anzahl Vergleiche von der Methode Sortieren durch Auswählen einfach aufsummieren kann:

Um das Minimum von zwei Objekten zu bestimmen, benötigst du einen Vergleich. Drei Objekte benötigen zwei, vier brauchen drei und so weiter. Um also achte Elemente zu sortieren benötigt Sortieren durch Auswählen sieben Vergleiche um das erste Element zu finden, dann sechs für das nächste, dann fünf, vier, drei zwei und einen Vergleich. Das ergibt:

$$7+6+5+4+3+2+1 = 28 \text{ Vergleiche}$$

für n Objekte sind es $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + \dots + n - 1$ Vergleiche.

Wenn wir dies aufsummieren wollen, können wir die einzelnen Summanden einfach umordnen.

Zum Beispiel: Die Summe $1+2+3+\dots+19$ kann man umordnen zu:

$$(1+19)+(2+18)+(3+17)+(4+16)+\dots+(9+11)+10 = 20 \cdot 9 + 10 = 190$$

Im Allgemeinen ist die Summe $1+2+3+4+\dots+n-1 = \frac{n(n-1)}{2}$